Поговорим о колебаниях!

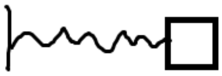
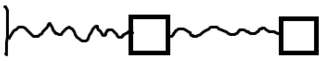
Вообще эта тема может быть разобрана как в лагранжевом формализме, так и в гамильтоновом формализме, так и без привязки к какому-либо формализму. Но семинаристы её традиционно разбирают в лагранжевом формализме и задачи по этой теме тоже с лагранжевым формализмом:

Задача № 78

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{5}{2}\dot{q}_2^2 - 3\left(q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2\right)$$

Найти нормальные колебания системы при начальных условиях $q_1(0) = q_2(0) = 0;\ \dot{q}_1(0) = 0;\ \dot{q}_2(0) = 3.$

Так что будем использовать именно его.

Что происходит? Помните, на механике вы, помимо классического гармонического осциллятора «грузик с пружинкой» , была система со множеством грузиков ? У неё уже не одна частота, а больше. Они называются модами колебаний – их столько же, сколько степеней свободы.

Сейчас мы возвращаемся к этой теме, но немного с другой стороны: нам дали готовый лагранжиан некой системы с двумя степенями свободы, описанная данным лагранжианом. Найти закон движения.

Замечу, что если от вас требовалось «найти нормальные ЧАСТОТЫ (или МОДЫ)» (частоты и моды – одно и то же), а не «найти закон движения», то всё решалось бы достаточно просто: запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

Для лагранжиана из условия это будет

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)+6q_1+6q_2=0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\dot{q}_1+5\dot{q}_2)+6q_1+18q_2=0 \end{cases}$$

Т.е.

$$\begin{cases} 2\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+6q_1+6q_2=0 \\ \ddot{q}_1+5\ddot{q}_2+6q_1+18q_2=0 \end{cases}$$

Давайте причешем эту систему, разделив вторые производные.

$$\begin{cases} 9\ddot{q}_1+24q_1+12q_2=0 \\ 9\ddot{q}_2+6q_1+30q_2=0 \end{cases}$$

Коэффициенты у вторых производных должны быть обязательно 1:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1+\frac{8}{3}q_1+\frac{4}{3}q_2=0 \\ \ddot{q}_1+\frac{2}{3}q_1+\frac{10}{3}q_2=0 \end{cases}$$

Выписываем матрицу из оставшихсякоэфов:

$$\begin{pmatrix} 8/3 & 4/3 \\ 2/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

Два ***КВАДРАТА*** частоты – это два СЗ этой матрицы. Решим характеристическое уравнение:

$(8/3-\omega^2)(10/3-\omega^2)-8/9=0$

Удобно сделать замену $w=3\omega^2$, тогда

$(8-w)(10-w)-8=0$

$80-18w+w^2-8=0$

$w^2-18w+72=0$

Корни: 12 и 6.
Но $w=3\omega^2$, тогда искомые частоты - 2 и sqrt(2).

Но тут требуется «найти нормальные колебания». Терминология в теормехе временами из задницы, согласен. Перевожу на русский язык: от вас ходят найти нормальные КООРДИНАТЫ. Исходная функция записана через ***плохие*** координаты q_1и q_2. Почему плохие? Потому что две билинейные формы (потенциальная и кинетическая энергии) имеют в своём составе смешанные произведения!
А мы хотим перейти к таким обобщённым координатам Q_1 и Q_2, что

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_1^2 Q_1^2 - \omega_2^2 Q_2^2\right)$$

Переменные разделятся.
Решать такой лагранжиан будет гораздо проще; так, из уравнений Эйлера мы получим два независимых уравнения одномерных гармонических колебаний.
Выразим новые переменные через старые:
$Q_1=Aq_1+Bq_2$, $Q_2=Cq_1+Dq_2$.
И подставим их в новый лагранжиан:

$$2L = (A\dot{q}_1 + B\dot{q}_2)^2 + (C\dot{q}_1 + D\dot{q}_2)^2 - \omega_1^2(Aq_1 + Bq_2)^2 - \omega_2^2(Aq_1 + Bq_2)^2$$

Приравниваем к старому лагранжиану (точнее, удвоенному старому лагранжиану):

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{5}{2}\dot{q}_2^2 - 3\left(q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2\right)$$

Найти нормальные колебания системы при начальных условиях $q_1(0) = q_2(0) = 0$; $\dot{q}_1(0) = 0$; $\dot{q}_2(0) = 3$.

Получаем

$$2\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + 5\dot{q}_2^2 - 6q_1^2 - 12q_1q_2 - 18q_2^2 =$$
$$= (A\dot{q}_1 + B\dot{q}_2)^2 + (C\dot{q}_1 + D\dot{q}_2)^2 - \omega_1^2(Aq_1 + Bq_2)^2 - \omega_2^2(Aq_1 + Bq_2)^2$$

А далее раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты при:

При $\dot{q}_1^2$: $2 = A^2 + C^2$ (1)

$\dot{q}_1\dot{q}_2$: $2 = 2AB + 2CD$ (2)

$\dot{q}_2^2$: $5 = B^2 + D^2$ (3)

q_1^2: $6 = \omega_1^2 A^2 + \omega_2^2 C^2$ (4)

$q_1 q_2$: $12 = 2\omega_1^2 AB + 2\omega_2^2 CD$ (5)

q_2^2: $18 = \omega_1 B^2 + \omega^2 D^2$ (6)

Мы получили систему из 6 уравнений на 6 неизвестных: A, B, C, D, ω_1, ω_2. Решив её, мы одновременно найдём как нормальные колебания, так и нормальные частоты.

Замечание. Мы могли ранее найти нормальные частоты ω_1, ω_2 другим способом (см. выше). В этом случае мы можем подставить вместо ω_1, ω_2 их численные значения, после чего выкинуть два любых уравнения и решать систему из 4 уравнений относительно A, B, C и D. Выкинутые два уравнения, если вы нашли частоты правильно, будут выполняться автоматически.

Но давайте мы предположим, что мы не знаем частоты. Решим систему (1)-(6). Удобно разбить уравнения на пары: (1) и (4), (2) и (5), (3) и (6).
Вместо (1) и (4) запишем два новых уравнения: (4)-(1)*ω_1^2 и (4)-(1)*ω_2^2. Получим

$$6 - 2\omega_1^2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) C^2 \quad (7)$$
$$6 - 2\omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) A^2 \quad (8)$$

Аналогично поступим с парами (3) и (6), (2) и (5). Получим такую систему:

$$6 - 2\omega_1^2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) C^2 \quad (7)$$
$$6 - 2\omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) A^2 \quad (8)$$

$$18 - 5\omega_1^2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) D^2 \quad (9)$$
$$18 - 5\omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) B^2 \quad (10)$$

$$6 - \omega_1^2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2) CD \quad (11)$$
$$6 - \omega_2^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) AB \quad (12)$$

Система (7)-(12) полностью равносильна системе (1)-(6), но проще.

Сравните (7)*(9) и $(11)^2$. Правые части у них совпадут, и вы можете приравнять левые:

$(6-2\omega_1^2)(18-5\omega_1^2)=(6-\omega_1^2)^2$

У этого квадратного уравнения два корня - $\omega_1^2 = 2$ или 4.

Аналогично и $\omega_2^2 = 2$ или 4.

Что из них 2, а что 4 – без разницы, можно и так, и так.Пустьω_1=2, ω_2=4. Тогда подставляем в (7)-(10):

$6-2*2=(4-2)C^2 \Rightarrow C^2=2/2=1.$

$6-2*4=(2-4)A^2 \Rightarrow A^2=-2/(-2)=1.$

$18-5*2=(4-2)D^2 \Rightarrow D^2=8/2=4.$

$18-5*4=(2-4)B^2 \Rightarrow B^2=-2/(-2)=1.$

Найдя A^2, B^2, C^2, D^2, мы нашли модули A, B, C и D. Теперь давайте посмотрим их знаки, используя (11) и (12):

$6-2=(4-2)CD \Rightarrow CD=4/2=2.$

$6-4=(2-4)AB \Rightarrow AB=-2/(-2)=1.$

Отсюда следует, что C и D должны быть одного знака, как и A и B. Попарно. Больше ограничений нет.

Годится, например, A=B=C=1, D=2.

Тогда

$Q_1=q_1+q_2$, $Q_2=q_1+2q_2$.

Собственно, вы нашли новые координаты ☺

Выписываете в них новыйлагранжиан

$$L=\frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2-\omega_1^2Q_1^2-\omega_2^2Q_2^2)$$

Уравнения Эйлера для него тривиальны

$$\begin{cases}\ddot{Q}_1+2Q_1=0\\ \ddot{Q}_2+4Q_2=0\end{cases}$$

Это синусы и косинусы:

$$Q_1=a\cos(\sqrt{2}t)+b\sin(\sqrt{2}t)$$
$$Q_2=c\cos(2t)+d\sin(2t)$$

Теперь осталось подставить НУ, чтобы найти закон движения. Правда, они у вас выражены через старые координаты, но у вас уже есть закон, связывающий новые и старые координаты, так что проблем возникнуть не должно. Например, вы можете без труда подсчитать НУ для ку-больших. Напомню условие:

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{5}{2}\dot{q}_2^2 - 3\left(q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2\right)$$

Найти нормальные колебания системы при начальных условиях $q_1(0) = q_2(0) = 0$; $\dot{q}_1(0) = 0$; $\dot{q}_2(0) = 3$.

Т.к. и q1, и q2 в начальный момент времени 0, то и Q1 с Q2 в начальный момент 0 (откуда нас сразу покинут косинусы и останутся лишь косинусы). Далее, Q1=q1+q2, и то же самое касается производных. Тогда в начальный момент производная Q1 будет 3. А производная Q2 – 6.

Итого, закон движения:

Q1=3cos(sqrt(2)t)

Q2=6cos(2t)

Где $Q1=q_1+q_2$, $Q2=q_1+2q_2$.

Замечание: мы молчаливо пропустили один важный этап: нахождение положение равновесия. Для этого берём и говорим: там q1 и q2, что у потенциальной энергии минимум. А раз так, то $\partial U/dq_1=0$ и $\partial U/dq_2=0$.

В нашем примере U прямо пропорционально $q1^2+2q1q2+3q2^2$. Пишем:

2q1+2q2=0

2q1+6q2=0

У этой системы одно решение – q1=q2=0.

Если положение равновесия соответствует (0,0), всё прекрасно – мы не получили неверный этап, пропустив этот этап. Иначе необходима замена, чтобы оно стало (0,0). Пример будет в следующей задаче.

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right)}_{W_k} - \underbrace{\left(\ln(q_1 q_2) + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\right)}_{W_п}$$

Первый шаг - ищем положение равновесия.

Оно соответствует минимуму $W_п$, т.е.

$$\frac{\partial W_п}{\partial q_1} = \frac{\partial W_п}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{q_2}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_1^2} = 0 \\ \frac{q_1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1^2} = 0 \\ \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_2^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$q_1 = q_2 = 1.$$

Мы рассматриваем малые колебания. Удобно работать с бесконечно малыми в окрестности 0, а не 1 или любой другой константы. Поэтому делаем замену: $x = q_1 - 1$; $y = q_2 - 1$

$q_1 = x + 1$; $q_2 = y + 1$.

Тогда $W_k = \frac{1}{2}\left((\dot{x}+\dot{1})^2 + (\dot{x}+\dot{1})(\dot{y}+\dot{1}) + (\dot{y}+\dot{1})^2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2\right)$

$W_п = \ln\left((x+1)(y+1)\right) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}$

Следующий шаг: разложить $W_п$ в ряд, оставив только слагаемые - одночлены не выше 2-й степени.

$$W_п = \ln(1 + x + y + xy) + \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{1-y}{1-y^2}$$

Для ln применим формулу $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$

$$W_п = x + y + xy - \frac{(x+y+xy)^2}{2} + \frac{1-x(1+x^2)}{\underbrace{1+x^4}_{\approx 1}} + \frac{1-y(1+y^2)}{\underbrace{1+y^4}_{\approx 1}} =$$

$$= x + y + xy - \frac{x^2+y^2+2xy}{2} + 1 - x + x^2 + 1 - y + y^2 = 2 + \frac{x^2+y^2}{2}$$

Если вы всё сделали правильно, то у вас не должно остаться одночленов 1-й степени. В противном случае вы, вероятно, или неправильно нашли положение равновесия, или неправильно подсчитали $W_п$.

Я бы ещё добавил, что $W_п$ должна выйти положительно определённой, т.е. >0 при любых значениях x и y (если только они оба нуль). По мере их роста потенциальная энергия должна быть больше, чем в положении равновесия, иначе положение равновесия не будет минимум потенциальной энергии. Так что если у вас $W_п = x^2-y^2$, вы неверно что-то подсчитали (ведь тогда мы можем двигаться вдоль оси y и тогда потенциальная энергия будет уменьшаться. И даже если вы получили $W_п = x^2+y^2+3xy$, при x=-y эта штука будет <0. А вот $W_п = x^2+y^2+xy$, например, является положительно определённой квадратичной формой.

Происходящее далее в линале называется «приведение двух квадратичных форм к диагональному виду одним преобразованием».

…считали $W_п$.

В нашем случае $W_к = \frac{\dot x^2+\dot y^2}{2}$ (константу 2 можно отбросать).

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot x \dot y - x^2 - y^2\right)$$

$$X = Ax + By, \quad Y = Cx + Dy$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot X^2 + \dot Y^2 - \omega_1^2 X^2 - \omega_2^2 Y^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (A\dot x + B\dot y)^2 + (C\dot x + D\dot y)^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + \dot x \dot y \\ \omega_1^2(Ax + By)^2 + \omega_2^2(Cx + Dy)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^2 + C^2 = 1, \quad B^2 + D^2 = 1, \quad 2AB + 2CD = 1 & (1)-(3) \\ \omega_1^2 A^2 + \omega_2^2 C^2 = 1, \quad \omega_1^2 B^2 + \omega_2^2 D^2 = 1, \quad 2\omega_1^2 AB + 2\omega_2^2 CD = 0 & (4)-(6 \end{cases}$$

Из (1) и (4)

$$C^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 1 - \omega_1^2$$
$$A^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 1 - \omega_2^2$$

Из (2) и (5)

$$D^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 1 - \omega_1^2$$
$$B^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 1 - \omega_2^2$$

Видно, что|A|=|B| и |C|=|D|. Если A=B и C=D, то система не имеет нетривиальных решений. Если A=-B и C=-D, то тоже. Рассмотрим, не теряя общности, оставшийся случай A=B, D=-C (что значит «не теряя общности? об этом позже). Тогдаиз (5) $A^2 - C^2 = \frac{1}{2}$, а из (1) $A^2 + C^2 = 1$ =>$A^2 = \frac{3}{4}, C^2 = \frac{1}{4}$. Из (6) вытекает $\omega_2^2 = 3\omega_1^2$, подставляя в (4), получаем $\omega_1^2 * \frac{3}{4} + 3\omega_1^2 * \frac{1}{4} = 1$. Окончательно имеем

$$\omega_1^2 = \frac{2}{3}, \omega_2^2 = 2, A = B = \frac{\sqrt{3}}{2}, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$$

Ещё раз отметим «не теряя общности». Мы выбрали A=B, D=-C, а могли выбрать A=-B, D=C. Но заметим, что нам нужно выбрать две новые координаты Q_1 и Q_2 - но какая разница, какая из них будет Ax+By, а какая Cx+Dy? Тут у нас есть некий произвол. Так что ответов может быть несколько – так что не спешите править своё решение, сверяя его с решением друга ☺